

Une introduction à l'analyse rétrograde

Une définition possible de l'analyse rétrograde est une méthode de résolution d'un problème en partant de la solution finale et en explorant « l'arbre de jeu à l'envers ». Transformez-vous donc en explorateurs du temps, tout du moins en pensée et dans le cadre bien restreint des jeux combinatoires.

Dans un jeu à information complète, l'analyse rétrograde propose d'étudier l'historique des étapes qui a permis d'arriver à une situation donnée. Elle sera abordée ici sous deux aspects : les énigmes qui l'utilisent (aux échecs et dans d'autres jeux) ainsi que l'algorithme (en anglais *backward induction*) qui est utilisé pour automatiser la résolution de situations de jeux combinatoires, voire pour créer des situations problèmes. Les deux aspects sont liés par une définition possible de l'analyse rétrograde : « méthode de résolution d'un problème en partant de la solution finale et en explorant l'arbre de jeu à l'envers ».

Deux problèmes simples

Remontez dans le temps pour résoudre les quatre problèmes suivants. Les deux premiers, qui portent sur le morpion, ne sont pas difficiles. N'hésitez

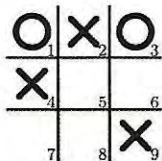
pas à chercher la réponse avant de regarder les commentaires.

X ₁	X ₂	O ₃
X ₄	O ₅	X ₆
O ₇	O ₈	O ₉

Morpion :

quel est le dernier coup joué ?

Les règles du morpion (ou tic-tac-toe) sont données dans l'article en page 128 : le but est d'aligner trois pions. On ne suppose pas ici que le symbole qui commence est connu, mais dans le diagramme, il est aisé de voir que O a joué en dernier puisqu'il a joué cinq symboles contre quatre X pour son adversaire. De plus, O a gagné avec deux alignements, ces deux alignements ont alors dû être réalisés en même temps. O vient donc de jouer à la position 7.



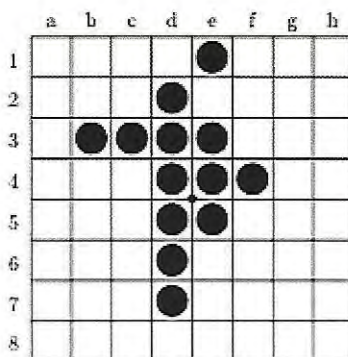
Morpion :

**personne n'a joué de coup perdant.
Comment s'est déroulée la partie ?**

Ici, il faut d'abord savoir qu'au morpion le résultat « normal » (attendu) entre deux joueurs expérimentés est un match nul. X a joué en dernier puisqu'il a placé trois symboles contre deux O pour son adversaire. Il n'a pas pu jouer en 9 (car en jouant en 5 à la place il gagnait la partie, son adversaire aurait donc joué un coup perdant précédemment), ni en 4 (car 8 à la place gagnait la partie). Il a donc joué son dernier coup en 2. X n'a pas pu jouer son premier coup en 9 car la réponse non perdante de O aurait dû être 5, qui n'a pas été joué. X a donc joué 4, 9 et 2 dans cet ordre. Si O avait joué son premier coup en 3, cela aurait été un coup perdant (par exemple 4, 3?, 1, 7, 5...) donc il a d'abord joué en 1. La partie est donc : 4, 1, 9, 3, 2.

Pour créer des problèmes du même acabit, on peut utiliser un arbre contenant les positions qui peuvent être atteintes quand personne ne joue de coup perdant, puis chercher les positions ayant une seule précédente (une seule flèche y mène). Vous trouverez l'arbre du morpion sur la page Web de l'auteur de cet article (abrobecker.free.fr/text/tictactoe.pdf).

Et deux problèmes plus délicats



Othello :
comment s'est déroulée la partie ?

L'excellent jeu d'Othello (Goro Hasegawa, Bandai, 1971), appelé aussi Reversi (voir en page 102), se joue sur un plateau de 8 x 8 cases avec soixante-quatre pions réversibles. Au début de la partie, deux pions noirs sont en d5 et e4, deux pions blancs sont en d4 et e5, et les noirs commencent.

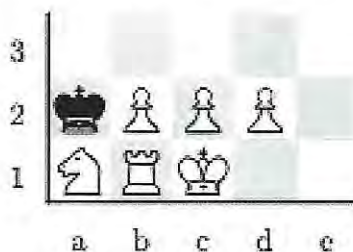


À tour de rôle, chaque joueur pose un pion de sa couleur de manière à encadrer des pions adverses entre deux de ses pions. Les pions encadrés sont alors capturés par retournement. Si un joueur ne peut pas respecter cette règle, il passe son tour. Si aucun joueur ne peut jouer, celui possédant le plus de pions de sa couleur sur le plateau gagne la partie.

La position de la figure ci-dessus représente l'un des gains les plus rapides possibles à Othello, et de manière surprenante, il n'y a qu'une seule manière d'aboutir à cette position !

Noir a joué en b3, d7, e1, f4 car ces pions n'étant pas encadrés, ils n'ont pas pu changer de couleur. Noir a commencé par 1.d3, on en déduit que Blanc a joué e3, d2, d6 et e3, puis, après quelques essais, on trouve l'intégralité de la partie :

1.d3 c3 2.b3 d2 3.e1 d6 4.d7 e3 5.f4.



Échecs : quel est le dernier coup joué ?

Le jeu d'échecs demande plus d'efforts, mais il recèle une telle richesse dans les parties ou les problèmes que l'on ne peut que vous conseiller de vous y intéresser. Le premier problème d'analyse rétrograde connu est une composition échiquéenne de Max Lange datée de 1858 (avec une clé de prise en passant, premier effet rétro-analysé). Bien sûr, pas d'informatique à cette époque, uniquement l'habileté des compositeurs de problème, dont l'incroyable Sam

Loyd. Il existe maintenant plusieurs dizaines de milliers de problèmes d'analyse rétrograde aux échecs.

Dans le problème ci-contre, posé en 1924 par Vilhelm Röpke dans le magazine danois *Skakbladet*, on voit que Noir n'a pas pu jouer en dernier, car son Roi n'a pas de case valide de provenance (en a3 ou b3, il aurait été en échec par des pions, qui n'ont pas bougé). C'est donc Blanc qui a bougé en dernier ; seuls son Cavalier et son Roi ont pu bouger.

Supposons que le Cavalier blanc ait bougé de b3 vers a1 sans capturer : bien que cela ne soit pas demandé, interrogeons-nous sur ce qu'était alors le coup noir précédent. La seule possibilité est le Roi, qui est allé de a1 vers a2 (il ne peut toujours pas venir de a3 ou b3). Mais, en reprenant ce coup, le Roi noir en a1 aurait été en échec illégal par la Tour blanche, qui n'a pas pu bouger pour donner cet échec (il est aussi en échec par le Cavalier, mais ce n'est pas cela qui pose problème car lui aurait pu bouger, par exemple depuis c5 et donner échec). Nous avons une impossibilité, notre hypothèse est donc fausse.

Supposons que le Cavalier blanc ait bougé de b3 vers a1 en ayant capturé une pièce noire. Mais alors les Noirs n'ont toujours aucun coup possible, car quelle que soit la pièce noire que l'on place en a1 elle ne peut pas bouger et le Roi noir non plus. Nous avons une impossibilité, notre hypothèse est donc fausse.

Donc c'est le Roi blanc qui a bougé en dernier.

Supposons que le Roi blanc ait bougé de d1 vers c1 sans capturer. Comme précédemment, le Roi noir ne peut pas avoir de coup de provenance possible. Nous avons une impossibilité, notre hypothèse est donc fausse.

Ainsi, le Roi blanc a bougé de d1 vers c1 en capturant une pièce noire. Laquelle ? On se convainc rapidement que seul un Cavalier noir permet de donner un coup antérieur aux Noirs. Donc le dernier coup joué est Roi blanc joue à partir de d1 et capture un Cavalier noir qui était en c1, ce que l'on note -1.Rd1×Cc1.

On le voit, les solutions d'un problème d'analyse rétrograde sont plus longues que celles d'un problème direct, mais elles sont aussi plus mathématiques. Le livre *Sherlock Holmes en Échecs* de Raymond Smullyan (Flammarion, 2000, malheureusement épuisé) en est une bonne initiation.

L'algorithme d'induction rétrograde

Peu après l'apparition des premiers ordinateurs, des algorithmes pour jouer aux échecs sont conçus (Turochamp par Alan Turing et David Champernowne en 1948, bien qu'il n'ait jamais été implémenté). Les premiers programmes apparaissent ensuite, à partir de la fin des années 1960, avec des algorithmes utilisant une *recherche en avant* dans l'arbre de jeu, faisant rapidement appel à la *méthode du minimax*, puis ses améliorations telles que *l'élagage alpha-bêta*... Les différences des programmes résidaient alors essentiellement dans les routines d'évaluation de position et dans leurs bibliothèques d'ouvertures.

Les développements pour le jeu d'échecs se transposent facilement pour les autres jeux combinatoires (Dames, Othello, go...) mais les efforts sont surtout portés sur les échecs dans un premier temps, avec deux jalons pour le grand public : en 1988,

HiTech (Hans Jack Berliner, Carl Ebeling, Murray Campbell, Andrew James Palay et Gordon Goetsch, 1984), premier programme qui bat un grand maître d'échecs, puis Deep Blue, qui bat le champion du monde Garry Kasparov en 1997 (voir page 38).

Parallèlement, Richard Bellman propose dès 1965 une méthode pour créer par analyse rétrograde une base de données pour les positions du jeu d'échecs et du jeu de dames anglaises. Il s'agit de partir des positions terminales (mat ou pat pour les échecs) et de regarder comment les autres positions permettent d'aboutir à ces positions terminales.

Dans les années 1970, certaines finales du jeu d'échecs sont entièrement analysées par cette méthode, notamment par Ken Thompson, qui a mis dès que possible ses bases de données à disposition, avec l'avènement du CD-ROM à cause de la taille des fichiers. Par exemple, la finale Roi + Tour + pion contre Roi + Tour occupe 60 Mo. En 2018, toutes les finales avec sept pièces sont explorées, leur stockage demande plusieurs téraoctets. Depuis 2000, les bases de données créées par analyse rétrograde sont utilisées par les programmes de jeu pour permettre de jouer parfaitement les finales dès lors que le nombre de pièces en présence diminue.

La recherche en avant est renforcée par les bases de données issues d'une recherche en arrière. Ce duo a aussi permis à Jonathan Shaeffer et son équipe de résoudre le jeu de dames anglaises en 2014 : si les deux joueurs jouent au mieux, le résultat sera une partie nulle. Dernier point clé dans ce petit histo-

rique : en 2016 le programme Alpha Go bat Lee Seedol, l'un des meilleurs joueurs mondiaux de go. Ce résultat fut plus surprenant que les précédents jalons, tant le jeu de go semblait hors de portée des programmes informatiques, à cause du beaucoup plus grand nombre de possibilités. Il a marqué un tournant dans les algorithmes utilisés par les programmes de jeu, puisqu'il utilisait des réseaux de neurones couplés à de l'apprentissage automatique. Cette technique a été adaptée avec succès à d'autres jeux : Alpha Zéro pour les échecs et le *shogi* (les « échecs japonais »), Alpha Star pour le jeu vidéo StarCraft (Blizzard Entertainment, 1998)...

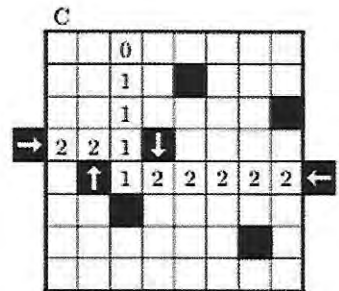
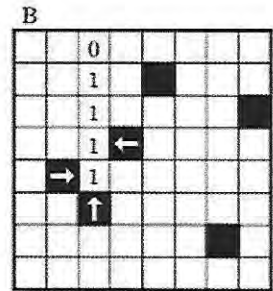
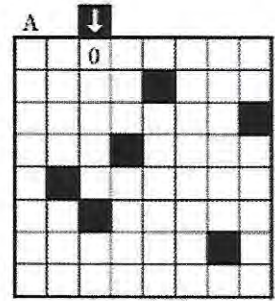
L'algorithme d'induction rétrograde reste toutefois utile car, contrairement à ces nouveaux algorithmes, non content d'être très fort, il garantit des lignes de jeu parfaites lorsqu'il y a peu de pièces.

En pratique...

Dans le *problème de Moskemoë*, le petit robot doit s'arrêter sur le carré noir, mais il se déplace en ligne droite et ne s'arrête que quand il rencontre un mur. La solution demande onze coups. Pour la trouver, étudions tous les états possibles du robot sur la grille, en commençant par la ou les positions terminales.



Le problème de Moskemoë.



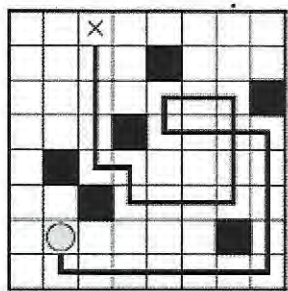
D

11	3	0	7	12	11	5	12
8	3	1	7		11	5	12
6	3	1	6	6	6	5	
2	2	1		7	8	5	8
11		1	2	2	2	2	2
11	11		3	4	4	4	4
11	11	11	3	7	11		9
10	10	10	3	7	10	10	9

Lorsque le robot est sur le carré noir, on indique qu'on est à la distance 0 de la solution en inscrivant un « 0 » à cette position. Puisque le robot a dû s'arrê-

ter sur cette case, il doit venir de la direction indiquée par la flèche (A). Sur toute cette ligne, il est à une distance de 1 de la solution, ce qui est indiqué en inscrivant un « 1 » pour ces positions. Il y a alors trois manières de s'être arrêté sur l'une des positions marquées 1 en touchant un mur, comme montré par les flèches (B). Sur toutes les autres cases des lignes indiquées par ces trois flèches, on est à une distance de 2 de la solution. Et là encore, les flèches (C) indiquent les quatre manières de s'être arrêté sur une de ces positions. On continue ainsi le processus jusqu'à ce que toutes les positions soient explorées (ou dans certains cas jusqu'à ce que la progression soit impossible). On obtient une base de données des distances à la solution (D).

La position initiale du robot est entourée, et se trouve à une distance de 11. À partir de là, on va vers la position qui se trouve à une distance de 10, puis à celle qui se trouve à une distance de 9... Cela donne le chemin vers la solution.



La solution.

Ce principe a été utilisé lors de la création de problèmes pour différents jeux : le jeu informatique Slidings (Alain Brobecker, 2010), les défis de Parc'Ours en forêt (Smart Games, 2022) et de Chats tournent en rond (Smart Games, 2023), deux jeux créés par Raf Peeters avec l'aide de l'auteur.

L'analyse rétrograde a aussi été utilisée pour la création de problèmes « directs », principalement des études de fin de partie. C'est un peu la situation inverse du problème d'Othello vu plus haut, qui était un problème rétrograde créé avec un algorithme de jeu en avant, ce qui montre encore que les deux approches s'enrichissent mutuellement.

Dans l'exemple du morpion ou de Slidings, la base de données est particulièrement petite, mais ce sont des cas exceptionnels : généralement, il faut plutôt compter des millions d'entrées. Un travail important d'analyse est alors à faire pour découvrir des positions intéressantes en elles-mêmes ou à cause de leurs solutions. On peut rechercher par exemple des coups forcés, une pièce qui effectue un aller-retour pour en laisser passer une autre, la position avec la plus longue solution (aux échecs, le record actuel est un mat en 584 coups avec huit pièces, trouvé par Marc Bourzutschky)...

Même s'il ne nous est pas possible de voyager dans le temps comme les personnages de science-fiction, l'analyse rétrograde permet d'explorer le passé avec une bonne dose de logique, avec parfois des calculs informatiques, mais surtout avec beaucoup de plaisir pour les amateurs de réflexion.



A.B.

© photonaphoto - stock.adobe.com