par M. Boutin et L. Rougetet

# Les jeux combinatoires

**Les jeux combinatoires sont des objets mathématiques à part entière. Vous trouverez dans cet article tout ce que vous avez voulu savoir sur ces jeux sans jamais oser le demander !**

L'expression « jeux combinatoires » s'emploie pour catégoriser des jeux répondant à des critères bien précis, qui ont été définis dans le domaine des mathématiques dans la seconde moitié du XX^e siècle, d'abord au Royaume-Uni et aux États-Unis, puis en France. Ce domaine porte aujourd'hui le nom de *théorie des jeux combinatoires*.

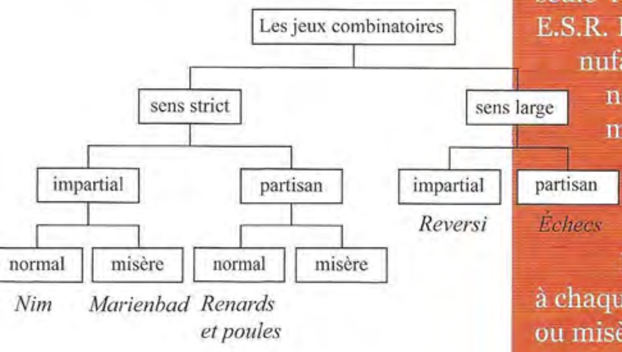
## Au sens strict ou au sens large

Une distinction est faite entre les jeux combinatoires *au sens strict* du terme et les jeux combinatoires *au sens large*. Un jeu combinatoire *au sens strict* vérifie six propriétés bien définies :

1 Il oppose exactement deux joueurs.
2 Ces deux joueurs jouent alternativement : pas de simultanéité comme au jeu de *pierre–feuille–ciseaux* par exemple.
3 Il n'y a pas de générateur de hasard : absence de lancer de dés ou de tirage de cartes…
4 L'information est complète (voir dossier 1 de ce livre). Cela signifie qu'à tout moment, chaque joueur dispose de l'intégralité des données fournies par le jeu (pas de cartes cachées par exemple).
5 Il n'y a pas de partie nulle : il y a toujours un gagnant (et donc un perdant) à l'issue de la partie.
6 Le gagnant est uniquement déterminé par le dernier coup de la partie (pas de comptage de points).

Selon les règles fixées au commencement de la partie, le jeu est pratiqué en *version normale* si le joueur qui ne peut plus jouer perd, ou en *version misère* si celui qui ne peut plus jouer gagne.

Pour les jeux combinatoires *au sens large*, les propriétés 5 et 6 ne sont pas prises en compte. Ainsi, dans ce type de jeux, on admet une fin de partie qui se conclut soit par un nul (comme au morpion), soit par un gagnant qui n'est pas forcément à l'origine du dernier coup (comme au go, où l'on compte les points), enfin, soit par la réunion des deux situations précédentes.




**Arbre de la classification des jeux combinatoires.**

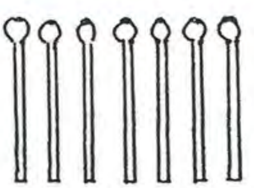
Un grand nombre de jeux combinatoires respectent les quatre premiers critères tels les échecs, les dames, le go... En revanche, les jeux combinatoires au sens strict (qui respectent les six critères) sont plus rares parmi les jeux de société commercialisés. L'un des plus connus est le jeu de Nim : sur une table, sont placées trois rangées d'allumettes, chacune en contient respectivement 7, 5 et 3 (on peut changer ces nombres, ainsi que le nombre de rangées).

Le jeu de Nim est donc un jeu combinatoire au sens strict. On peut même préciser que c'est un jeu combinatoire *impartial* dans la mesure où les coups autorisés ne dépendent que de la position, contrairement aux jeux combinatoires *partisans* pour lesquels les coups dépendent des joueurs. Par exemple, aux échecs, le joueur qui se voit affecter les Blancs ne peut déplacer les Noirs, alors qu'au jeu de Nim aucune allumette n'appartient spécifiquement à l'un des deux joueurs.

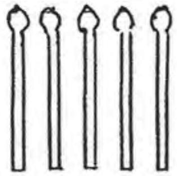
## Dr Nim : le b.a.-ba du jeu de Nim

Une version simplifiée du jeu de Nim (avec une seule rangée d'objets) a été commercialisée par E.S.R. Inc., une entreprise spécialisée dans la manufacture de jeux éducatifs en 1966, sous le nom de *Dr. Nim*. Ce jeu dispose d'un système mécanique astucieux qui permet de jouer soit seul contre lui, soit à deux joueurs.

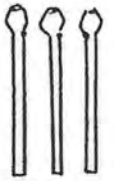
Ce jeu se ramène à un jeu de Nim à une seule pile, qui contient entre neuf et vingt billes. On peut en retirer une, deux ou trois à chaque coup. On peut y jouer en version normale ou misère. Dans les deux cas, sa résolution permet une approche remarquable de la notion de reste d'une division.

**À tour de rôle, les deux joueurs choisissent de retirer une, deux, trois... ou toutes les allumettes, dans une seule rangée. Au moins une allumette doit être retirée à chaque coup.**



**La partie se déroule jusqu'à ce que toutes les rangées soient vides (un joueur peut décider de jouer dans n'importe quelle rangée à chaque coup).**



**Le joueur qui prend la (ou les) dernière(s) allumette(s) remporte la partie (version *normale* du jeu).**

## Des valeurs aux positions de jeu

L'une des premières contributions à avoir présenté mathématiquement la résolution complète exacte d'un jeu combinatoire est celle du mathématicien Charles L. Bouton (1869–1922), qui théorise le jeu de Nim en 1901 et pose ainsi les fondements de la théorie qui deviendra un domaine de recherche à part entière à partir du milieu des années 1970, grâce notamment aux travaux théoriques de John Conway (1937–2020, voir le dossier « Le génie de John Conway », *Tangente* 194, 2020).

L'absence de hasard et l'alternance des coups entre les deux joueurs dans un jeu combinatoire permettent, en théorie, de dénombrer toutes les positions pouvant se présenter dans une partie, et d'envisager ainsi un chemin optimal qui mène à une position finale gagnante (voir la première partie de ce livre). Mais on comprend rapidement que le nombre de positions possibles dans un jeu est souvent considérablement élevé, et que des méthodes d'analyse autres que le dénombrement s'avèrent nécessaires.

L'idée principale de la théorie mathématique des jeux combinatoires est donc d'attribuer des valeurs aux différentes positions de jeu (qui se décomposent en plusieurs sous-jeux), et de travailler avec ces valeurs pour déterminer l'issue d'une partie (gagnante, perdante ou nulle) à partir de n'importe quelle position. La théorie des jeux combinatoires s'est construite en empruntant des outils à d'autres domaines tels que la théorie des nombres, la combinatoire des mots ou encore la théorie des graphes. L'un des défis actuels pour la communauté mathématicienne réside dans la compréhension théorique des jeux à score comme le go (voir page 48), l'Othello (Reversi, voir page 102) ou le jeu des petits carrés. En parallèle, les jeux combinatoires servent également de support idéal en intelligence artificielle pour tester le niveau de performance des stratégies.

La victoire aux échecs du supercalculateur Deep Blue d'IBM sur le champion du monde en titre Garry Kasparov en 1997 ou celle du programme Alpha Go en 2016 contre le champion du monde Lee Seedol au jeu de go témoignent de ces avancées significatives.

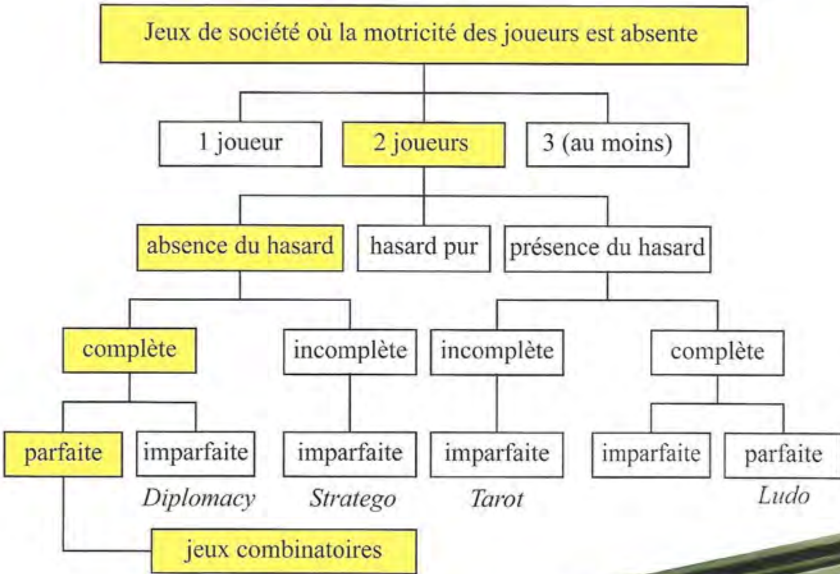
## La catégorie des jeux abstraits

Aujourd'hui, les jeux de société embrassent une kyrielle d'activités ludiques qui forment un ensemble fluctuant et très vague : des jeux où les joueurs développent des actions motrices (palets, billes, fléchettes...) ; des jeux qui se pratiquent en solitaire (Baguenaudier, Rubik's Cube ou mots croisés) ; des jeux à plusieurs (échecs, Scrabble, Monopoly, Tarot...) ; des jeux de pur hasard, et d'autres encore. L'arbre ci-contre illustre une classification des jeux de société (sans motricité) dans laquelle la position des jeux combinatoires est précisée. Les critères classificatoires sont imposés par l'ensemble des règles des jeux concernés.

Mais quelle est la différence entre jeux combinatoires et jeux abstraits ?

La théorie des jeux combinatoires ne prend en compte que le système de règles ; elle est détachée de toute symbolique et de tout aspect matériel.

L'expression « jeux abstraits » est une traduction littérale de l'anglais *abstract game*, dont l'étymologie est pratiquement identique dans les deux langues.




Dans « abstrait » ou « *abstract* », on retrouve l'idée de « retirer ». S'il s'agit de retirer la symbolique d'un jeu afin de considérer uniquement son système de règles, la plupart des jeux de société pourraient probablement être qualifiés de « jeux abstraits ». Alors pourquoi la symbolique serait-elle retirée dans certains jeux et pas dans d'autres ? Le *jeu militaire* (voir la figure) est combinatoire, bien qu'il soit attaché à une symbolique belliqueuse.


**Le jeu militaire français.**

Ainsi, les jeux combinatoires et les jeux abstraits ne sont pas de même nature, bien qu'un nombre important de jeux appartienne aux deux catégories. Les premiers sont définis par une théorie claire et précise, contrairement aux seconds, qui sont indéfinissables, car il forme un ensemble dont les limites sont floues. La théorie des jeux abstraits reste à établir.

**M.B. & L.R.**

### Références


- *Jeux combinatoires*.
  Éric Duchêne et Aline Parreau, 2017, disponible en ligne.
- *Des récréations arithmétiques au corps des nombres surréels et à la victoire d'un programme aux Échecs. Une histoire des jeux combinatoires*.
  Lisa Rougetet, thèse de doctorat de l'université Lille-I, 2014, disponible en ligne.
- *Autour du théorème de Sprague–Grundy*.
  Lisa Rougetet, *Images des mathématiques*, CNRS, 2016, disponible en ligne.
- *Jeux de société et jeux combinatoires*. Michel Boutin, dans *Jeux sportifs, jeux de société et classification*, Pierre Parlebas et Michel Boutin, L'Harmattan, 2021.